MA2 – „písemná" přednáška 4. 5. 2020 – 1. část

Minulou přednášku jsme skončili substitucí v trojném integrálu do válcových (cylindrických) souřadnic, zůstala „jedna ze souřadnic kartézských – u nás z-ová", a souřadnice x, y jsme transformovali do „souřadnic polárních", tj. – místo souřadnic bodu

$X = (x, y, z)$ jsme „vzali" $X = (r, \varphi, z)$,

tedy vztah mezi souřadnicemi válcovými a kartézskými je dán zobrazením $\Phi(r, \varphi, z) = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad , \quad r \in (0, +\infty),\ \varphi \in \langle 0, 2\pi),\ z \in R$$

,

vektorově $\Phi(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$

A pro přečtení (užití Fubiniho věty) „vyšel" vzorec:

(po substituci do válcových souřadnic):

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$$

,

$f \in R(\Omega_{xyz})$, $\Omega_{xyz} \subset R^3$ měřitelná oblast, $\Phi(\Omega_{r\varphi z}) = \Omega_{xyz}$.

A zkusme intuitivně vzorec „vysvětlit":

v analogii se substitucí v integrálu dvojném – asi (?) – elementární „hranolek" (při dělení) objemu $dV_{(xyz)} = dx\,dy\,dz$ se „změní" na „hranolek" o základně $r\,d\varphi . dr$ (viz dvojný $\iint$) a výšce dz – tj. $dV_{r,\varphi,z} = r\,dr\,d\varphi . dz$

A „pořádněji" – strany elementárního hranolku v souřadnicích válcových budou dány „malými" tečnými vektory v bodě (r,φ,z) k integračním čtverečkům v tomto bodě – a tečné vektory jsou dány parciálními derivacemi zobrazení Φ, tj. jsou to vektory

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}dr,\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}d\varphi,\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz,\ \text{tj.}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}dr,\ \begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}d\varphi,\ \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}dz\ .$$

A objem „hranolku" o těchto stranách je dán absolutní hodnotou determinantu, jehož sloupce (nebo řádky) jsou uvedené vektory, tj.

$$„dV" = \begin{vmatrix}\cos\varphi, & -r\sin\varphi, & 0\\ \sin\varphi, & r\cos\varphi, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{vmatrix} dr\,d\varphi\,dz = J(r,\varphi,z)\,dr\,d\varphi\,dz = r.\,dr\,d\varphi\,dz\,,$$

$J(r,\varphi,z)$ – Jacobián, neboli determinant Jacobiho matice zobrazení Φ, tj.:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{pmatrix}\cos\varphi, & -r\sin\varphi, & 0\\ \sin\varphi, & r\cos\varphi, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix},$$

a jednodušeji (rozvojem dle třetího řádku): $\underline{J(r,\varphi,z) = r}$

A snad už teď budeme rozumět formulaci věty o substituci v trojném integrálu:

<u>Je dáno zobrazení $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\Phi : M \subset R^3 \to R^3$</u>

bodům $(u,v,w) \in M$ přiřazuje bod $(x,y,z) = \Phi(u,v,w) \in R^3$

(ve složkách:

$x = \varphi_1(u,v,w)$; $y = \varphi_2(u,v,w)$; $z = \varphi_3(u,v,w)$, $(u,v,w) \in M$)

<u>a nechť Φ má tyto vlastnosti:</u>

1) Φ je prosté zobrazení na M, M otevřená množina;

2) $\Phi \in C^{(1)}(M)$, tj. zobrazení Φ má na M spojité parciální derivace 1. řádu

3) determinant Jacobiho matice zobrazení Φ, Jacobián, je nenulový v M, tj.

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w} \end{vmatrix} (u,v,w) \neq 0 \quad v\ M.$$

(Φ se nazývá regulární zobrazení M).

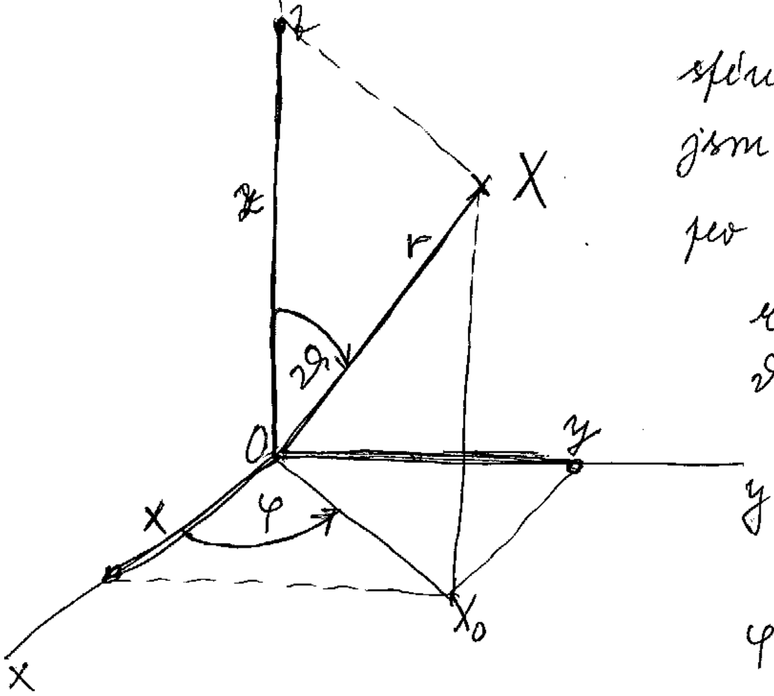
Pak, je-li $\Omega_{uvw} \subset M$, $\Phi(\Omega_{uvw}) = \Omega_{xyz}$, a $f \in R(\Omega_{xyz})$, platí:

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_{uvw}} f(\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w)) \cdot |J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

Pomocí Jacobiánu, jehož sloupce jsou i zde tečné vektory k integrálním křivkám, počítáme objemy rovnoběžnostěnů, kterými aproximujeme objemy elementárních oblastí dělení „Ω" – tak se ve vzorcích pro substituci objeví „Jacobián".

K přednáškám o dvojném a trojném integrálu připojme ještě soubor řešených příkladů, teď bychom „doplnili" trojný integrál ještě uvedením jedné substituce, užívané a užitečné – substituce do „sférických" souřadnic. („Hodí" se zvláště pro koule – což fyzika často bere jako „zkoumané" oblasti)

Máme-li bod $X \in R^3$, (x, y, z) – kartézské souřadnice X,



sférické souřadnice bodu X jsou (r, ϑ, φ), kde pro $X \neq O$ je

r – vzdálenost X od O.

ϑ – úhel, který svírá polopřímka OX s kladnou poloosou z;

φ – úhel, který svírá polopřímka OX_0 s kladnou poloosou x ($X_0 = (x, y, 0)$ – průmět bodu X do roviny $z = 0$)

Vztah mezi sférickými souřadnicemi a kartézskými je tedy dán zobrazením:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi & r &\in (0,+\infty) \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi & \vartheta &\in \langle 0,\pi\rangle \\ z &= r\cos\vartheta & \varphi &\in \langle 0,2\pi) \end{aligned}$$

Zobrazení $(x,y,z) = \Phi(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$ má na $M = (0,+\infty)\times(0,\pi)\times\langle 0,2\pi)$ vlastnosti, požadované ve větě o substituci v trojném integrálu (1., 2., -zejména), a spočtěme Jacobián – potřebujeme „do vzorce" pro substituci:

$$J(r,\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi, & r\cos\vartheta\cos\varphi, & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi, & r\cos\vartheta\sin\varphi, & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta, & -r\sin\vartheta, & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\vartheta \quad ,$$

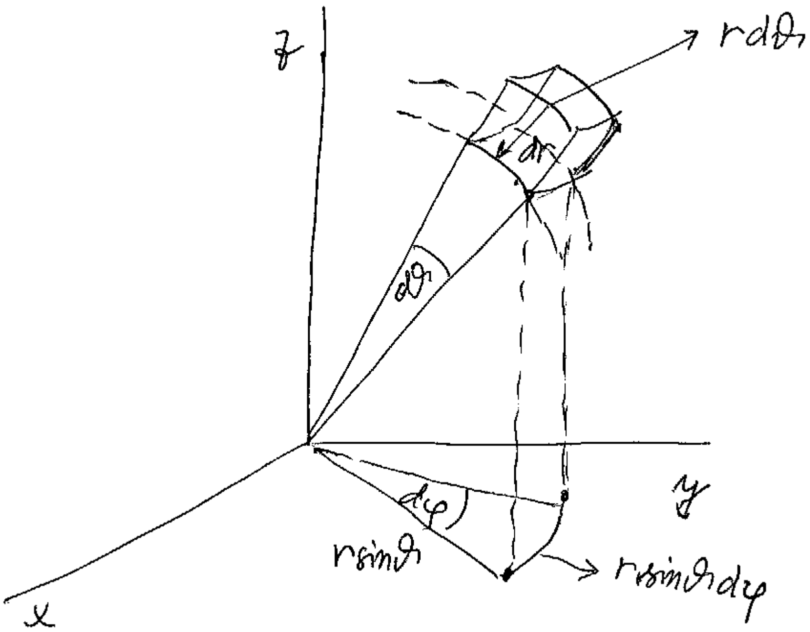
tj. $J(r,\vartheta,\varphi) \neq 0$ v M (výpočet $J(r,\vartheta,\varphi)$ - strana 10, zkuste sami).

Je-li tedy $\Omega_{xyz} \subset R^3$ měřitelná oblast, a $f \in R(\Omega_{xyz})$, pak

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_{r,\vartheta,\varphi}} f(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi}$$

Pokud oblast Ω_{xyz} obsahuje „body osy z", zde je pak $J(r,\vartheta,\varphi)=0$, ale je to jen na množině míry „nulové" (v R^3), takže integrál pak nezávisí na „hodnotách funkce na této množině".

A možná, že si lze představit výpočet „objemu" dV jakožto objemu „hranolku" o stranách „dr", „r sin ϑ dφ", „r dϑ", (viz neumělý náčrtek)



a pak:

$$dV = dr.(r\,d\vartheta)\,.\,(r\sin\vartheta\,d\varphi), \text{ tj.}$$

$$\underline{dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi}$$

a příklady:

1) Vypočít objem koule o poloměru R (>0)

$$\Omega_{xyz} = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$$

$$\Omega_{r\vartheta\varphi} = \{[r,\vartheta,\varphi];\ r\in(0,R\rangle,\ \vartheta\in\langle 0,\pi\rangle,\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\}$$

$$\underline{V(\Omega)} = \iiint\limits_{\Omega_{xyz}} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_{r\vartheta\varphi}} r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi \underset{F.V.}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \int_0^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta =$$

($V(\Omega)$ – míra Ω)

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \underbrace{[-\cos\vartheta]_0^{\pi}}_{=2} dr = 2\,.\,2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R =$$

$$= \underline{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Pro srovnání zkusme vyřešit substituci do válcových souřadnic – – nebude tak „pěkné" a jednoduché:

$$\Omega_{xyz} = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\} \Rightarrow \quad z^2 \le R^2-(x^2+y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1)\ -\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \quad a \quad x^2+y^2 \le R^2,$$

tj. 2) $\quad 0 < r \le R\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\ -\sqrt{R^2-r^2} \le z \le \sqrt{R^2-r^2}$

tedy:

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega_{xyz}} 1\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi z}} r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \Big[z\Big]_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} dr = 2\pi \int_0^R 2r\sqrt{R^2-r^2}\,dr = \left| \begin{array}{l} R^2-r^2 = t \\ -2r\,dr = dt \\ r=0 \to t=R^2 \\ r=R \to t=0 \end{array} \right| =$$

$$= -2\pi \int_{R^2}^{0} \sqrt{t}\,dt = \frac{2\pi\, 2}{3}\Big[t^{3/2}\Big]_0^{R^2} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2) Máme určit hmotnost tělesa Ω, kde

$\Omega_{xyz} = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ a hustota $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

(i) „model":
$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \Big(= \iiint\limits_{\Omega} \rho\, dV \text{ – „ve fyzice"}\Big)$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

(ii) <u>Integrace:</u> užijeme substituci do sférických souřadnic:

$1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \quad \longrightarrow \quad 1 \leq r^2 \leq 4$, tj. $1 \leq r \leq 2$

$\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

(Ω je koule o poloměru 2, ze které „vyjmeme" kouli o poloměru 1, tj. $\Omega = K(2) \setminus K(1)$, $K(R)$ – zde koule o středu v 0 a poloměru R)

$\Omega_{r\vartheta\varphi} = \{ [r, \vartheta, \varphi];\ 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$

tedy,
$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_{r\vartheta\varphi}} r^2 \cdot r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi \underset{F.V}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r^4\, dr \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r^4 \underbrace{\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi}}_{=2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 2r^4\, dr = 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2 d\varphi = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5}\,(32-1) = \frac{4\pi}{5} \cdot 31$$

Integrace ve válcových souřadnicích by u tohoto integrálu byla dost „složitější!":

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega_{xyz}} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \underset{F.V.}{=} \iint\limits_{\omega_{xy}} dx\,dy \int_{?}^{?} (x^2+y^2+z^2)\,dz$$

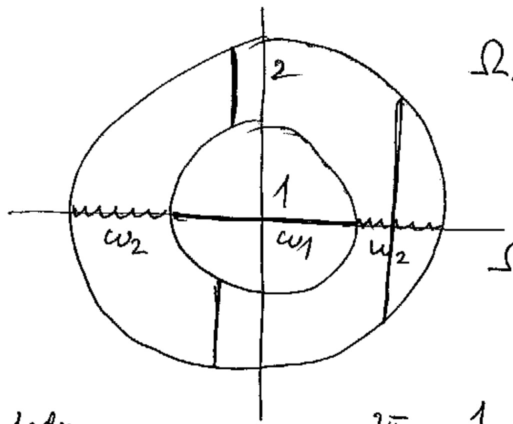
a představíme-li si oblast Ω, tak zřejmě pro $x^2+y^2\le 1$ budeme „z" integrovat od vnitřní kulové plochy k vnější, zatímco pro $1\le x^2+y^2\le 2$ bude $|z|\le\sqrt{4-(x^2+y^2)}$:

Můžeme si zjednodušit integrál (oblast i hustota je „souměrná" dle roviny $z=0$) :

$$m(\Omega) = 2\left(\iint_{\omega_1} dx\,dy \int_{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} (x^2+y^2+z^2)\,dz + \iint_{\omega_2} dx\,dy \int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} (x^2+y^2+z^2)\,dz \right),$$

kde $\omega_1 = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 1\}$, $\omega_2=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$ a využili jsme aditivity Lebesgueova integrálu.

Náčrtek „řezu" Ω : a ve válcových souřadnicích :



Ω_1 : $\omega_1 = \{(r,\varphi];\ r\le 1,\ \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle\}$
a $\sqrt{1-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}$ v ω_1 ;

Ω_2 : $\omega_2 = \{[r,\varphi];\ 1\le r\le 2,\ \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle\}$
a $0\le z\le\sqrt{4-r^2}$, v ω_2 ;

tedy,

$$m(\Omega) \underset{F.V.}{=} 2\left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\cdot \int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} (r^2+z^2)\,dz + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r \int_0^{\sqrt{4-r^2}} (r^2+z^2)\,dz \right) = \dots\dots$$

$$\left(= 2\left(\iiint_{\Omega_1} (r^2+z^2)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz + \iiint_{\Omega_2} (r^2+z^2)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz \right)\right.$$.

„a dodatky"

1) Výpočet Jacobiánu $J(r,\vartheta,\varphi)$:

$$J(r,\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi, & r\cos\vartheta\cos\varphi, & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi, & r\cos\vartheta\sin\varphi, & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta, & -r\sin\vartheta, & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix}\text{rozvineme} \\ \text{např.} \\ \text{dle 3. řádku}\end{matrix}\right)$$

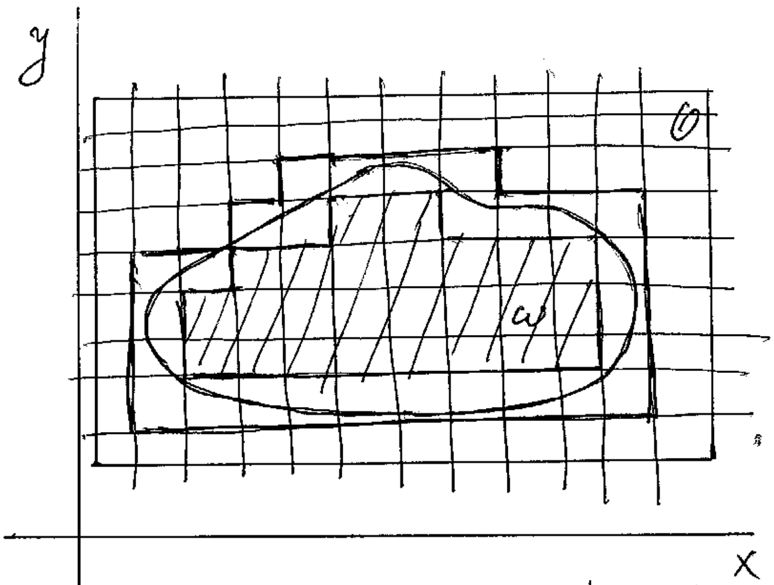
$$= \cos\vartheta\left(r^2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos^2\varphi + r^2\cos\vartheta\sin\vartheta\sin^2\varphi\right) -$$

$$-(-r\sin\vartheta)\left(r\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + r\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right) =$$

$$= \cos\vartheta\left(r^2\cos\vartheta\sin\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\right) + r^2\sin^3\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) =$$

$$= r^2\sin\vartheta\left(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right) = \underline{r^2\sin\vartheta}$$

2) Poznámka o „jiné" definici měřitelné množiny v $R^2(R^3)$:
(pro čtenáře i jiné literatury než skript doc. Tesaře, VŠCHT)
míra množiny – t.zv. Jordanova míra – je definována takto:
označme $\omega\subset R^2$, ω nechť je omezená množina, pak stejně



jako dříve, existuje obdélník O takový, že $\omega\subset O$, a opět $D = D_x\times D_y$ je dělení O
označme $O_{ij} = \langle x_{i-1},x_i\rangle\times\langle y_{j-1},y_j\rangle$
a $|x_i-x_{i-1}| = \Delta_i x$, $|y_j-y_{j-1}| = \Delta_j y$
a $|O_{ij}| = \Delta_i x\cdot\Delta_j y$
(tj. obsah obdélníčku O_{ij});

označme $s(D) = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j}\, |O_{ij}|$, $O_{ij}\subset\omega$ a $S(D) = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j}\, |O_{ij}|$, $O_{ij}\cap\omega\neq\emptyset$;

Tedy, $s(D)$ je plocha sjednocení všech obdélníčků dělení dělení D, (tj. dělení obdélníku O), které jsou „celé" v oblasti ω, a $S(D)$ je plocha sjednocení všech obdélníčků z D, které mají s ω společné body (tj. mají s ω neprázdný průnik) – snažila jsem se to načrtnout. Pro libovolné dělení D platí $s(D) \leq S(D)$; a dále budeme O dělit stále „jemněji", tj. $r(D) \to 0$ (a opět – $r(D) = \max\limits_{i,j}(r(D_x), r(D_y))$), a budou-li existovat limity (pak budou tyto limity vlastní, neboť $\{s(D)\}$ i $\{S(D)\}$ jsou množiny omezené)

$$\lim_{r(D)\to 0} s(D) \quad \text{(vnitřní Jordanova míra množiny } \omega\text{) a}$$

$$\lim_{r(D)\to 0} S(D) \quad \text{(vnější Jordanova míra množiny } \omega\text{)},$$

bude
$$\lim_{r(D)\to 0} s(D) \leq \lim_{r(D)\to 0} S(D);$$

a bude-li $\lim\limits_{r(D)\to 0} s(D) = \lim\limits_{r(D)\to 0} S(D)$ (tj. vnější a vnitřní Jordanovy míry budou stejné), pak ω je množina měřitelná a $\lim\limits_{r(D)\to 0} s(D) = \lim\limits_{r(D)\to 0} S(D) = \mu(\omega)$ je t.zv.

Jordanova míra množiny ω ... $\mu(\omega)$

a dá se ukázat, že „měřitelnost" ω závisí na vlastnostech hranice ω, tj. na $\partial\omega$, stejně, jako u definice předchozí (a obě míry jsou shodné). Všechno další zůstává tedy tak, jak jsme si ukázali, při vyšetřování $\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$.

A pro $\Omega \subset R^3$ lze míru definovat analogicky (alespoň si „představit").